VYTAUTO DIDŽIOJO UNIVERSITETAS
Informatikos fakultetas

MOKYKLA DELTA

7 KLASĖ

5-8 klasių matematikos olimpiada “Matematinis iššūkis”

---

1. Iš pradžių kompiuterio kaina buvo padidinta 25 %, o vėliau sumažinta 20 %. Kuris teiginys apie kompiuterio kainą yra teisingas?

A Galutinė kaina yra 5 % didesnė už pradinę. **B** Galutinė kaina yra 5 % mažesnė už pradinę.
C Galutinė kaina lygi pradinei kainai. **D** Galutinė kaina yra 10 % mažesnė už pradinę.

Sprendimas. Pradinę kainą pažymėkime x. Po padidinimo kompiuterio kaina lygi $1{,}25x$, o po sumažinimo kaina lygi $0{,}8 \cdot 1{,}25x = x$.
Atsakymas. **C**.

2. Ievos ir jos brolio turimų eurų santykis yra $2 : 5$. Kai jie gavo dar po 5 eurus, jų turimų pinigų santykis tapo $3 : 5$. Kiek pinigų Ieva turėjo iš pradžių?
A 2 **B** 4 **C** 6 **D** 8

Sprendimas. Dabar Ieva turi $2x$ Eur, jos brolis turi $5x$ Eur. Kai abu gavo dar po penkis eurus, tai Ievos turimų pinigų suma lygi $(2x + 5)$ Eur, o jos brolio turimų pinigų suma lygi $(5x + 5)$ Eur.
Sudarome proporciją:
$(2x + 5) : (5x + 5) = 3 : 5, \quad \Rightarrow \quad \frac{2x+5}{5x+5} = \frac{3}{5},$
$3 \cdot (5x + 5) = 5 \cdot (2x + 5),$
$15x + 15 = 10x + 25.$
$x = 2.$
Ieva turi $2 \cdot 2 = 4$ Eur.
Atsakymas. **B**.

3. Tėčio amžius yra 3 metais didesnis negu trigubas jo sūnaus amžius. Po trejų metų, tėčio amžius bus 10 metų didesnis, negu dvigubas jo sūnaus amžius. Kiek metų tėčiui yra dabar?

Sprendimas. Tegu sūnui dabar yra n metų, tuomet tėčiui yra $3n + 3$ metai. Po trejų metų sūnui bus $n + 3$, o tėčiui $3n + 6$ metai. Sudarome ir išsprendžiame lygtį:
$2 \cdot (x + 3) + 10 = 3x + 6,$
$2x + 6 + 10 = 3x + 6,$
$x = 10.$
Tėčiui dabar yra $3 \cdot 10 + 3 = 33$ metai.
Atsakymas. 33 metai.

4. Jeigu $2^a = 4^b = 16^c = 256$, tai kam lygu $3a - 2b - c$?
Sprendimas. $2^a = 256$, todėl $a = 8$; $4^b = 256$, todėl $b = 4$; $16^c = 256$, todėl $c = 2$.
Apskaičiuojame reiškinio reikšmę: $3a - 2b - c = 3 \cdot 8 - 2 \cdot 4 - 2 = 14$.
Atsakymas. 14.

VYTAUTO DIDŽIOJO UNIVERSITETAS
Informatikos fakultetas

MOKYKLA DELTA

7 KLASĖ

5-8 klasių matematikos olimpiada “Matematinis iššūkis”

---

5. Prie apskrito stalo susėdo 29 *Keistos* šalies gyventojai. Vieni jų yra riteriai (visada sako tiesą), kiti – melagiai (visada meluoja). Susėdę kai kurie iš jų pasakė: „Greta manęs sėdi tik vienas melagis.“ Visi kiti pasakė: „Greta manęs sėdi du melagiai.“ Kiek mažiausiai melagių gali būti prie stalo?

Sprendimas. Jeigu prie stalo greta sėdėtų trys riteriai, tai vidurinis meluotų. Vadinasi, tarp trijų vienas šalia kito sėdinčiųjų yra bent vienas melagis. Pasirinkime vieną melagį ir jam suteikime numerį 29, o visus likusius žmones, sėdinčius nuo jo laikrodžio rodyklės kryptimi, sunumeruokime skaičiais nuo 1 iki 28. Kadangi kiekvienoje iš nesusikertančių grupių $(1, 2, 3), (4, 5, 6), \ldots, (25, 26, 27), (29)$ yra bent po vieną melagį, vadinasi, iš viso melagių yra ne mažiau kaip $\frac{27}{3} + 1 = 10$.

Parodykime, kad melagių skaičius gali būti lygus 10. Vėl sunumeruokime sėdinčiuosius nuo 1 iki 29. Tegu žmonės, kurių numeriai 3, 6, 9, ..., 27, 29 yra melagiai, o likusieji yra riteriai. Be to, visi riteriai, išskyrus riterį, kurio numeris 28, pasakė pirmą frazę, o riteris, kurio numeris 28 ir visi melagiai pasakė antrą frazę. Vadinasi, mažiausias melagių skaičius lygus 10.

Atsakymas. 10.

6. Lentelė sudaryta iš 3×3 langelių. Į langelius įrašyti skaičiai nuo 1 iki 9 (kiekviename langelyje – skirtingas skaičius). Sudėjus kiekvienos eilutės ir kiekvieno stulpelio skaičius, visos gautos sumos yra skirtingos. Kiek daugiausia iš šių sumų gali būti pirminiai skaičiai?

Sprendimas. Pavyzdys, kai keturios sumos yra pirminiai skaičiai:

2	4	3	9
8	6	9	23
5	1	7	13
15	11	19	

Įrodykime, kad daugiau sumų, lygių pirminiam skaičiui, būti negali.

Pirminiai skaičiai, kuriems gal būti lygi trijų skirtingų skaitmenų suma, yra šie: 7, 11, 13, 17, 19 ir 23.

Tam, kad visos 6 sumos būtų pirminiai skaičiai, jos turėtų būti lygios būtent šiems skaičiams. Sumą, lygią 7, galima gauti vieninteliu būdu – sudėjus 1, 2 ir 4. Tegu tai būna pirmos eilutės skaičiai. Sumą, lygią 23, irgi galima gauti vieninteliu būdu – tik sudėjus 6, 8 ir 9. Tegu tai būna antros eilutės skaičiai. Tuomet trečioje eilutėje turėtų būti skaičiai 3, 5 ir 7. Jų suma $3 + 5 + 7 = 15$ nėra pirminis skaičius.

Pastebėkime, kad visų 6 nagrinėjamų sumų suma nepriklauso nuo skaičių išdėstymo lentelėje ir visada lygi $2 \cdot (1 + 2 + \ldots + 9) = 90$. Tuomet, jeigu penkios sumos būtų kažkurie penki pirminiai skaičiai iš 7, 11, 13, 17, 19 ir 23, tai ir šešta suma būtų lygi pirminiam skaičiui iš šio rinkinio. Tačiau visos šešios sumos negali būti pirminiai skaičiai. Todėl ir penkios sumos negali būti pirminiai skaičiai.

Atsakymas. 4.

VYTAUTO DIDŽIOJO UNIVERSITETAS
Informatikos fakultetas

MOKYKLA DELTA

7 KLASĖ

5-8 klasių matematikos olimpiada “Matematinis iššūkis”

---

7. Emilė sugalvojo dviženklį skaičių. Jos tėtis nori jį atspėti. Kiekvienu klausimu tėtis parašo savo pasirinktą dviženklį natūralųjį skaičių, o Emilė pasako, kiek **skaitmenų** iš tėčio skaičiaus sutampa su jos sugalvoto skaičiaus skaitmenimis (dešimčių skaitmuo lyginamas su dešimčių, o vienetų – su vienetų): nė vienas, vienas arba abu. Įrodykite, kad tėtis gali atspėti Emilės sugalvotą skaičių uždavęs ne daugiau kaip 10 klausimų.

Pastaba. Jeigu nepavyksta sugalvoti strategijos su 10 klausimų, bet sugalvojote, kaip nustatyti skaičių, uždavus 11, 12 ar daugiau klausimų, tuomet užrašykite geriausią iš savo sugalvotų sprendimų.

Įrodymas. Tėtis rašo Emilei paeiliui šiuos skaičius 12, 23, 34, 45, 56, 67, 78, 89, 91.
Jeigu tėvus užrašius skaičių, Emilė pasako, kad sutapo du skaitmenys, tai tas skaičius ir yra jos sugalvotas.
Jeigu Emilė, atsakydama į visus šiuos devynis klausimus, patvirtina vieno skaitmens sutapimą tik viename skaičiuje $\overline{ab}$, tai sugalvotas skaičius yra $\overline{a0}$.
Jeigu Emilė patvirtina po vieną sutapimą dviejuose skaičiuose $\overline{ab}$ ir $\overline{cd}$, tai sugalvotas skaičius yra $\overline{ad}$ arba $\overline{cb}$. Užduodamas dešimtą klausimą, tėtis užrašo vieną iš šių skaičių, pavyzdžiui $\overline{ad}$. Jeigu Emilė patvirtina dviejų skaitmenų sutapimą, tai užrašytas skaičius ir yra sugalvotas. Jeigu Emilė sako, kad nė vienas skaitmuo nesutampa, tai sugalvotas skaičius lygus $\overline{cb}$.